QUELQUES RÉFLEXIONS INÉVITABLES

FRANK WAGNER

RÉSUMÉ. Nous généralisation la construction de Frécon du *radical inévitable* aux groupes dans les théories stables et même simples.
ABSTRACT. We generalize Frécon's construction of the *inevitable radical* to groups in stable and even simple theories.

1. Introduction

Dans [1] Olivier Frécon a défini un sous-groupe définissablement caractéristique d'un groupe de rang de Morley fini, le sous-groupe $\mathrm{In}(G)$ des éléments *inévitables*, sous-groupe minimal tel qu'on puisse espérer construire une géométrie sur $G/\mathrm{In}(G)$. Nous allons généraliser ses définitions au cas d'un groupe stable, ou encore hyperdéfinissable dans une théorie simple, et étudier les propriétés des sous-groupes obtenus.

2. Les définitions inévitables

Rappelons d'abord les définitions (ou plutôt les caractérisations équivalentes) de [1] :

Définition 2.1. Soit G un groupe de rang de Morley fini. Une famille définissable $\mathcal{F}$ de sous-groupes connexes de G est *géométrique* si l'ensemble $\{g \in G : \exists!\ F \in \mathcal{F}\ g \in F\}$ est générique dans G.

Un élément $g \in G$ est *géométrique* s'il y a une famille géométrique $\mathcal{F}$ avec $g \notin \bigcup \mathcal{F}$.

G est *géométrique* si tout élément non-trivial de G est géométrique.

Un élément non-géométrique est *inévitable*. L'ensemble des éléments inévitables est noté $\mathrm{In}(G)$.

Frécon montre que $\mathrm{In}(G)$ est un sous-groupe définissable et définissablement caractéristique de G. En plus, si $\mathcal{F}$ est géométrique pour G,

Date: 18 janvier 2011.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 03C45 ; 20E34.
Key words and phrases. simple theory ; stable group ; geometric family of subgroups ; inevitable radical.
Recherche partiellement soutenu par le projet ANR-09-BLAN-0047 Modig.

alors $\{F \in \mathcal{F} : \mathrm{In}(G) \leq F\}$ est géométrique, et donc $G/\mathrm{In}(G)$ est un groupe géométrique.

Remarque 2.2. Puisque la famille $\mathcal{F}$ est définissable, les sous-groupes dans $\mathcal{F}$ sont uniformément définissables. Par contre, comme on ne sait pas si la connexité est une propriété définissable, on ne sait pas non plus si toute famille de sous-groupes connexes uniformément définissables est contenue dans une famille définissable de sous-groupes connexes. Plus généralement on ne sait pas si la famille des composantes connexes d'une famille de sous-groupes uniformément définissables est encore uniformément définissable. Il n'est donc pas clair si $\mathrm{In}(G)$ est le plus petit sous-groupe normal de G tel que le quotient soit géométrique.

Si $\mathcal{F}$ est une famille géométrique d'un groupe de rang de Morley G, alors on peut définir une géométrie naturelle dont les points sont les éléments de G, et les droites les translates (à gauche) des sous-groupes dans $\mathcal{F}$. Alors génériquement deux points de G sont sur une droite commune unique.

Frécon note qu'on doit aussi considérer les familles géométriques des puissances cartésiennes de G : Pour le groupe additif d'un pur corps K algébriquement clos, $\mathrm{In}(K) = K$ comme pour tout groupe minimal, mais $\mathrm{In}(K \times K)$ est trivial.

Définition 2.3. Soit G un groupe de rang de Morley fini et $\rho_n : G \to \prod_{i<n} G$ le plongement $g \mapsto (g, 1, \ldots, 1)$. On pose

$$\mathrm{In}_P(G) = \bigcap_{n>0} \rho_n^{-1}(\mathrm{In}(\prod_{i<n} G)).$$

Alors $\mathrm{In}_P(G)$ est définissable, définissablement caractéristique, contenu dans $\mathrm{In}(G)$, et vérifie $\mathrm{In}_P(G/\mathrm{In}_P(G)) = 1$. De plus,

$$\mathrm{In}_P(\prod_{i<n} G) = \prod_{i<n} \mathrm{In}_P(G).$$

Exemple 2.4. [2] Soit G un groupe de rang de Morley fini et C un sous-groupe de *Carter* (sous-groupe définissable connexe nilpotent presque auto-normalisant) *généreux* (dont la réunion des conjugués recouvre G génériquement). Alors la famille des conjugués de C est géométrique.

Exemple 2.5. [1] Soit G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe définissable sans torsion, d'indice fini dans son normalisateur. Alors soit H admet une famille géométrique de sous-groupes propres, soit la famille de conjugués de H est géométrique dans G.

En particulier, si $H = C$ est un sous-groupe de Carter et G est un groupe simple connexe minimal, alors soit la famille de conjugués de

C est géométrique, soit C a une famille géométrique de sous-groupes propres et interprète un corps algébriquement clos.

Nous conseillons l'article de Frécon [1] pour une analyse des groupes géométriques algébriques et une discussion des groupes géométriques de rang de Morley fini. Pour plus de renseignements sur les groupes stables, auxquels nous cherchons à généraliser les résultats de Frécon, le lecteur pourra consulter [3], [4] ou [6] ; quant aux théories simples et leurs groupes hyperdéfinissables il y a [5], [7] et [8].

3. Rajoutons un peu de simplicite !

Les définitions ci-dessus restent raisonnables dans le contexte plus général des groupes ω-stables, où les composantes connexes existent et sont définissables. Dans un groupe stable, les composantes connexes ne sont a priori que type-définissables, données par une intersection infinie de sous-groupes définissables d'indices finis ; de plus, le contexte naturel dans une théorie stable sont les groupes type-définissables. Pire encore, pour un groupe hyperdéfinissable dans une théorie simple, les composantes connexes dépendent des paramètres, et même dans le cas type-définissable la question si un tel groupe est intersection de groupes définissables reste ouverte.

Définition 3.1. Soit G un groupe hyperdéfinissable sur A, et H un sous-groupe de G hyperdéfinissable sur B.

– Un sous-groupe hyperdéfinissable K de G est *commensurable* avec H si $H \cap K$ est d'indice borné dans H et dans K.
– H est *localement connexe* si H est égal à tout H^γ, conjugué de H par un élément de G ou par un automorphisme modèle-théorique fixant A, dès que H et H^γ sont commensurables.
– B est le *paramètre canonique* de H (sur A) si tout automorphisme fixant A stabilise H si et seulement s'il fixe B.

La notion de connexité locale dépend du groupe ambient G et de ses paramètres A.

Fait 3.2. – *Soit G un groupe type-définissable sur A dans une théorie stable, et $H \leq G$ un sous-groupe type-définissable. Alors H possède un paramètre canonique, et sa composante connexe H^0 est localement connexe. Si H est relativement définissable, alors H possède un paramètre canonique imaginaire fini, et l'intersection de tous les A-conjugués et de tous les G-conjugues de H commensurables avec H est un sous-groupe H^{lc} relativement définissable localement connexe d'indice fini dans H.*

– [5, Corollary 4.2.10, Corollary 4.5.16 et Lemma 4.5.19] *Soit G un groupe hyperdéfinissable sur A dans une théorie simple, et $H \leq G$ un sous-groupe hyperdéfinissable. Alors il existe un sous-groupe H^{lc} hyperdéfinissable localement connexe commensurable avec H ; si G est type-définissable et H relativement définissable, alors H^{lc} est relativement définissable. Tout groupe localement connexe à un paramètre canonique.*

Remarque 3.3. Soit $F = \{G \cap F_c : c \models p\}$ une famille de sous-groupes relativement définissables localement connexes dans une théorie simple telle que F_c définisse un groupe pour tout c (par exemple si le groupe ambient G est définissable). Pour $c \models p$ soit $n(\varphi, k) = D^*(G \cap F_c, \varphi, k)$ le (φ, k)-rang local de $G \cap F_c$. Alors si $c', c'' \models p$ et

$$D^*(G \cap F_{c'} \cap F_{c''}, \varphi, k) \geq n(\varphi, k)$$

pour tout (φ, k), alors $G \cap F_{c'}$ et $G \cap F_{c''}$ sont commensurables, et donc $c' = c''$. Par compacité il y a un ensemble fini $\{(\varphi_i, k_i) : i < n\}$, une formule $\psi_0 \in p$ et un ensemble définissable $X \supseteq G$ tels que

$$\psi_0(c') \wedge \psi_0(c'') \wedge \bigwedge_{i<n} D^*(X \cap F_{c'} \cap F_{c''}, \varphi_i, k_i) \geq n(\varphi_i, k_i)$$

implique $c' = c''$. Soit $\psi(x)$ la formule

$$\psi_0(x) \wedge \bigwedge_{i<n} D^*(X \cap F_x, \varphi_i, k_i) \geq n(\varphi_i, k_i).$$

Alors la famille $\bar{\mathcal{F}} = \{G \cap F_c : c \models \psi\}$ est une famille définissable de sous-groupes localement connexes de G.

A partir de maintenant soit G un groupe hyperdéfinissable sur $\emptyset$ dans une théorie simple. Comme nos familles de sous-groupes ne consistent plus de groups connexes, mais localement connexes, il convient de relacher un peu la condition d'unicité dans la définition d'une famille géométrique.

Définition 3.4. Soit A un ensemble de paramètres. La famille $\mathcal{F}$ des A-conjugués d'un sous-groupe localement connexe hyperdéfinissable de G est *(pseudo-)géométrique* si $\bigcup \mathcal{F}$ est générique, et si pour tout $g \in G$ générique l'ensemble $\{F \in \mathcal{F} : g \in F\}$ est de cardinal au plus 1 (resp. de cardinal borné).

Un élément $g \in G$ est *(pseudo-)géométrique* s'il y a une famille (pseudo-)géométrique $\mathcal{F}_g$ avec $g \notin \bigcup \mathcal{F}_g$. Le groupe G est *(pseudo-)géométrique* si tout élément non-trivial de G est (pseudo-)géométrique.

Un élément non-(pseudo-)géométrique est *(pseudo-)inévitable.*

L'ensemble des éléments inévitables est noté $\mathrm{In}(G)$, l'ensemble des éléments pseudo-inévitables $\Psi(G)$.

Si $\mathcal{F}$ est une famille (pseudo-)géométrique, puisque tous ses éléments sont conjugués, la connexité locale implique que F_1 et F_2 dans $\mathcal{F}$ sont égaux dès qu'ils sont commensurables. On notera aussi que tout membre de $\mathcal{F}$ contient un élément générique de G (qui algébraise son paramètre canonique, bien sur), comme tous les groupes dans $\mathcal{F}$ sont conjugués par A-automorphisme.

Remarque 3.5. Soit $\mathcal{F}$ une famille hyperdéfinissable sur A avec $\bigcup \mathcal{F}$ générique et $\{F \in \mathcal{F} : g \in F\}$ de cardinal au plus un (resp. borné) pour tout $g \in G$ générique sur A. Soit $F_0 \in \mathcal{F}$ et $g \in F_0$ générique de G sur A. Soit $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ la sous-famille des A-conjugués de F_0. Alors $\mathcal{F}_0$ est une famille (pseudo-)géométrique pour G. La condition que les éléments de $\mathcal{F}$ soient conjugués sur A n'est donc pas une vraie restriction.

Remarque 3.6. Soit $\mathcal{F} = \{G \cap F_c : c \models p\}$ une famille géométrique de sous-groupes relativement définissables dans une théorie simple telle que F_c définisse un groupe pour tout c. Alors par compacité il existe un ensemble générique X de G et une formule $\varphi \in p$ tel que pour tout $c' \models \varphi$ l'ensemble $G \cap F_{c'}$ est un sous-groupe localement connexe de G, et pour tout $g \in X$ il existe un unique $c_g \models \varphi$ avec $g \in G \cap F_{c_g}$. Si donc G est définissable, alors $\{G \cap F_{c'} : c' \models \varphi\}$ est une famille géométrique au sens de Frécon (sauf qu'on a remplacé la connexité par la connexité locale, faute de pouvoir obtenir cette première définissablement). Réciproquement, si $\mathcal{F}$ est une famille géométrique sur A au sens de Frécon, $g \in G$ est générique sur A et $F_c \in \mathcal{F}$ contient g, alors la famille des A-conjugués de F_c est une famille géomérique au sens de la définition 3.4.

Remarque 3.7. Si $\mathcal{F}$ consiste de sous-groupes connexes, alors l'élément $g \in G$ générique qui est contenu dans un membre de $\mathcal{F}$ est forcément dans la composante connexe de G ; si la théorie est stable, il n'y a qu'un seul type possible, et on peut supposer dès le départ que G soit connexe. En particulier notre définition 3.4 généralise bien celle de Frécon.

Par contre, même dans le cas stable, si $\mathcal{F}$ ne consiste pas de sous-groupes connexes, il n'y a pas raison que g soit générique principal, ni même qu'un générique principal soit contenu dans un membre de $\mathcal{F}$: Soit G le produit semidirect de $\mathbb{Q}$ avec une involution i qui agit par inversion, et $\mathcal{F}$ la famille de conjugués de $\langle i \rangle$. Alors G est ω-stable de rang 1 et degré 2 ; un générique non-principal est dans un seul membre de $\mathcal{F}$, et $\bigcup \mathcal{F} \cap G^0 = \{0\}$.

Remarque 3.8. Afin d'éviter des cas dégénérés on peut demander dans la définition d'une famille géométrique $\mathcal{F}$ que les groupes $F \in \mathcal{F}$ soient infinis, ou qu'un générique de G ne soit pas étranger à F, ou encore que G soit F-analysable (conditions de plus en plus restrictives). Inversement, nos preuves ne se servent de la connexité locale que pour s'assurer qu'un paramètre canonique existe ; en utilisant des paramètres de définition quelconques raisonnablement indépendants on peut se passer de cette hypothèse.

Remarque 3.9. Si $\mathcal{F}$ est une famille géométrique pour G, alors la famille des translatés à gauche des sous-groupes dans $\mathcal{F}$ nous donne une géométrie sur G tel que génériquement deux points sont sur au plus une droite commune. Si $\mathcal{F}$ n'est que pseudo-géométrique, cela nous donne une pseudo-géométrie : Génériquement deux points ne sont que sur un nombre borné de droites communes. Par compacité, si le paramètre canonique d'un groupe dans $\mathcal{F}$ est un élément imaginaire (par exemple si les groupes sont relativement définissables), ce nombre borné est fini.

Remarque 3.10. Si $\mathcal{F}_i$ est une famille (pseudo-)géométrique de G_i pour $i = 1, 2$ et $F_1 \in \mathcal{F}_1$ et $F_2 \in \mathcal{F}_2$ ont des paramètres indépendants, alors la famille des conjugués de $F_1 \times F_2$ est (pseudo-)géométrique dans $G_1 \times G_2$.

Proposition 3.11. *Soit $A \subseteq B$, et $F \leq G$ un sous-groupe localement connexe hyperdéfinissable de paramètre canonique c avec $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A B$. Si la famille $\mathcal{F}_A$ des A-conjugués de F est (pseudo-)géométrique, alors la famille $\mathcal{F}_B$ des B-conjugués l'est. La réciproque est vrai pour les familles pseudo-géométriques ; dans le cas d'une famille géométrique il faut supposer en plus que* $\mathrm{tp}(c/A)$ *soit stationnaire (par exemple si $A = \mathrm{acl}^{eq}(A)$ dans une théorie stable).*

Démonstration : Soit $\mathcal{F}_A$ (pseudo-)géométrique, et $g \in F$ générique de G sur A. On peut supposer $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{Ac} B$. Par transitivité $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A gc$, et g est générique sur B. Donc $\bigcup \mathcal{F}_B$ est générique. Mais tout générique de G sur B est générique sur A, et $\mathcal{F}_B \subseteq \mathcal{F}_A$. Donc $\mathcal{F}_B$ est (pseudo-)géométrique.

Pour la réciproque, supposons $\mathcal{F}_B$ pseudo-géométrique. Evidemment $\bigcup \mathcal{F}_A \supseteq \bigcup \mathcal{F}_B$ est générique dans G. Soit $g \in F$ générique de G sur A ; on peut supposer $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A B$. Soient $c_i \equiv_A c$ les paramètres canoniques des $F_i \in \mathcal{F}_A$ avec $g \in F_i$ pour $i \in I$. Si I n'est pas borné, on peut supposer $(c_i : i \in I)$ indiscernable sur A et $(c_i : i \in I) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{Ag} B$, d'où $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A (c_i : i \in I)$. Comme $p(X, c) = \mathrm{tp}(B/Ac)$ ne devie pas sur A, on trouve une réalisation

$$B' \models \bigcup_{i\in I} p(X,c_i) \quad \text{avec} \quad B' \underset{A}{\perp} (c_i : i \in I) \ ;$$

on peut supposer en plus que

$$B' \underset{(A,c_i:i\in I)}{\perp} g,$$

d'où $B' \perp_A g$. Donc g est générique sur B' et $F_i \in \mathcal{F}_{B'}$, l'image de $\mathcal{F}_B$ sous un A-automorphime envoyant B sur B'. Comme $\mathcal{F}_B$ est pseudo-géométrique, $\mathcal{F}_{B'}$ l'est aussi, est I doit être bornée après tout.

Soit enfin $\mathcal{F}_B$ géométrique et $\mathrm{tp}(c/A)$ stationnaire. Alors $\bigcup \mathcal{F}_A$ est générique ; soient donc $g \in F$ et $(F_i, c_i : i \in I)$ comme dans le paragraphe précédent. On suppose encore

$$g \underset{A}{\perp} B \quad \text{et} \quad (c_i : i \in I) \underset{Ag}{\perp} B.$$

Donc $c_i \perp_A B$ pour tout $i \in I$; par stationarité $c_i \equiv_B c$ et $F_i \in \mathcal{F}_B$. Puisque g est générique sur B et $\mathcal{F}_B$ est géométrique, $|I| = 1$. Donc $\mathcal{F}_A$ est géométrique. □

Remarque 3.12. En particulier, dans une théorie simple $\mathrm{In}(G)$ et $\Psi(G)$ sont invariants sous l'adjonction de paramètres.

Corollaire 3.13. *Soit $\mathcal{F}$ une famille (pseudo-)géométrique pour G. Si $g \in G$ est (pseudo-)inévitable, alors $g \in F$ pour tout $F \in \mathcal{F}$ dont le paramètre canonique c est indépendant de g sur A.*

Démonstration : La famille $\mathcal{F}_g$ des Ag-conjugués de F est toujours (pseudo-)géométrique, donc $g \in \bigcup \mathcal{F}_g$. Mais alors $g \in F$. □

Corollaire 3.14. $\mathrm{In}(G)$ *et* $\Psi(G)$ *sont des sous-groupes de G définissablement et modèle-théoriquement caractéristiques (c'est-à-dire invariant par automorphisme définissable ou modèle-théorique).*

Démonstration : Si $\mathcal{F}$ est une famille géométrique pour G et $g, g' \in \mathrm{In}(G)$, alors pour $F \in \mathcal{F}$ de paramètre canonique indépendant de g, g' on a $g, g' \in F$, et donc $g'g^{-1} \in F$, d'ou $g'g^{-1} \in \mathrm{In}(G)$: Il s'agit bien d'un sous-groupe. Puisque $\mathrm{In}(G)$ est invariant sous l'adjonction de paramètres nécessaires pour définir un automorphisme σ, et comme $\mathcal{F}$ est géométrique si et seulement si $\sigma(\mathcal{F})$ est géométrique pour tout automorphisme définissable ou modèle-théorique, $\mathrm{In}(G)$ est définissablement et modèle-théoriquement caractéristique.

La preuve dans le cas pseudo-géométrique est analogue. □

Corollaire 3.15. *S'il y a une famille géométrique non-triviale,* $\mathrm{In}(G)$ *ne contient aucun élément générique. S'il y a une famille pseudo-géométrique non-bornée,* $\Psi(G)$ *ne contient aucun élément générique.*

Démonstration : Supposons que $g \in \mathrm{In}(G)$ soit générique pour G, et soit $\mathcal{F}$ une famille géométrique sur A. On peut supposer que $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\, g$. Soient $F, F' \in \mathcal{F}$ de paramètres canoniques c, c'. On peut les choisir tels que $c, c' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A g$. Alors $g \in F$ et $g \in F'$ par le corollaire 3.13, d'où $F = F'$ et $\mathcal{F}$ est triviale.

Si $g \in \Psi(G)$ est générique et $\mathcal{F}$ est une famille pseudo-géométrique sur A, avec $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\, g$, on considère des groupes distincts $F_i \in \mathcal{F}$ de paramètres canoniques c_i, pour $i \in I$. On peut supposer $(c_i)_{i \in I} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A g$. Alors $g \in F_i$ pour tout $i \in I$ par le corollaire 3.13. Ainsi I et donc $\mathcal{F}$ sont bornés. $\square$

Théorème 3.16. *Si T est stable,* $\mathrm{In}(G)$ *et* $\Psi(G)$ *sont hyperdéfinissables sur $\emptyset$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{F}$ une famille géométrique, disons la famille des A-conjugués d'un groupe F_c localement connexe de paramètre canonique c. On considère l'ensemble hyperdéfinissable

$$G_{\mathcal{F}} = \{g \in G : \exists\, y \models \mathrm{stp}(c/A)\ [\, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A g \wedge g \in F_y\,]\}.$$

Alors $G_{\mathcal{F}}$ est un sous-groupe hyperdéfinissable de G contenu dans $\bigcup \mathcal{F}$. Si $g \in G$ est inévitable, alors pour $c' \models \mathrm{stp}(c/A)$ avec $c' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A g$ le corollaire 3.13 montre que $g \in F_{c'}$, d'où $g \in G_{\mathcal{F}}$ et $In(G) \subseteq G_{\mathcal{F}}$. Si $g \in G$ est géométrique, il existe une famille géométrique avec $g \notin \bigcup \mathcal{F}$, d'où $g \notin G_{\mathcal{F}}$. Ainsi $\mathrm{In}(G) = \bigcap_{\mathcal{F}} G_{\mathcal{F}}$, ce qui est hyperdéfinissable par la condition de chaîne dans les théories stables. Comme $\mathrm{In}(G)$ est $\emptyset$-invariant, il est hyperdéfinissable sur $\emptyset$.

La preuve pour $\Psi(G)$ est analogue. $\square$

Corollaire 3.17. *Soit T stable. Si $\mathcal{F}$ est une famille géométrique, alors* $\mathrm{In}(G) \leq \bigcap \mathcal{F}$ *; si $\mathcal{F}$ est pseudo-géométrique, alors* $\Psi(G) \leq \bigcap \mathcal{F}$.

Démonstration : Si $\mathcal{F}$ est B-invariant, $F \in \mathcal{F}$ avec paramètre canonique c, et $g \in In(G)$ est générique sur Bc, alors $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_B c$, d'où $g \in F$. Donc $\mathrm{In}(G) \leq F$, et $\mathrm{In}(G) \leq \bigcap \mathcal{F}$.

La preuve dans le cas pseudo-géométrique est analogue. $\square$

Corollaire 3.18. *Soit T stable.*

– $\mathrm{In}(G) = \bigcap \{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F}$ *géométrique*$\}$.
– $\Psi(G) = \bigcap \{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F}$ *pseudo-géométrique*$\}$. $\square$

Corollaire 3.19. In *et* Ψ *sont des radicaux, c'est-à-dire* $\mathrm{In}(G/\mathrm{In}(G))$ *et* $\Psi(G/\Psi(G))$ *sont triviaux.*

Démonstration : Soit $\mathcal{F}$ géométrique pour G. Comme $\mathrm{In}(G) \leq F$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, l'image $\bar{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ dans $G/\mathrm{In}(G)$ est géométrique. Comme $\bigcap_{\mathcal{F}} \bigcap \mathcal{F} = \mathrm{In}(G)$, on a

$$\mathrm{In}(G/\mathrm{In}(G)) \leq \bigcap_{\mathcal{F}} \bigcap \bar{\mathcal{F}} = \big(\bigcap_{\mathcal{F}} \bigcap \mathcal{F}\big)/\mathrm{In}(G) = \mathrm{In}(G)/\mathrm{In}(G) = \bar{1}.$$

La preuve pour Ψ est analogue. □

Remarque 3.20. On peut alors définir In_P et Ψ_P de la mème manière que Frécon (définition 2.3) et obtenir que $\mathrm{In}_P(G)$ et $\Psi_P(G)$ sont des radicaux hyperdéfinissables, définissablement et modèle-théoriquement caractéristiques, et contenu dans $\mathrm{In}(G)$ et $\Psi(G)$, respectivement. De plus,

$$\mathrm{In}_P(\prod_{i<n} G) = \prod_{i<n} \mathrm{In}_P(G) \qquad \text{et} \qquad \Psi_P(\prod_{i<n} G) = \prod_{i<n} \Psi_P(G).$$

4. Dans le cas simple, les choses se compliquent...

Si G est un groupe dans une théorie simple où on n'a la condition de chaîne qu'à indice borné près, il convient de remplacer les groupes $\mathrm{In}(G)$ et $\Psi(G)$ par des approximations $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ et $\widetilde{\Psi}(G)$, comme c'est déjà le cas pour le centralisateur, le normalisateur ou le centre approximatif [5, Definition 4.4.9].

Théorème 4.1. *Il existe un sous-groupe normal* $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ *hyperdéfinissable sur* $\emptyset$ *tel que* $\mathrm{In}(G) \leq \widetilde{\mathrm{In}}(G)$*, et si* $\mathcal{F}$ *est une famille géométrique, alors* F *intersecte* $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ *dans un sous-groupe d'indice borné pour tout* $F \in \mathcal{F}$*. De même, il existe un sous-groupe normal* $\widetilde{\Psi}(G)$ *hyperdéfinissable sur* $\emptyset$ *tel que* $\Psi(G) \leq \widetilde{\Psi}(G)$*, et si* $\mathcal{F}$ *est une famille pseudo-géométrique, alors* F *intersecte* $\widetilde{\Psi}(G)$ *dans un sous-groupe d'indice borné pour tout* $F \in \mathcal{F}$*. Les groupes* $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ *et* $\widetilde{\Psi}(G)$ *sont invariants sous automorphisme* $\emptyset$*-définissable, et commensurables à leurs conjugués par un automorphisme définissable.*

Démonstration : Soit $F = F_c$ un groupe dans une famille géométrique, et p_F le type Lascar-fort de son paramètre canonique c sur $\emptyset$. On considère l'ensemble hyperdéfinissable

$$X_F = \{g \in G : \exists\, y \models p_F\ [y \perp g \wedge g \in F_y]\}.$$

Soit $X = \bigcap_F X_F$. Puisque l'intersection porte sur les differentes possibilités pour $p_F \in S(\mathrm{bdd}(\emptyset))$, l'intersection est bornée et X est hyperdéfinissable.

Si $g', g'' \in X$ sont indépendants, alors pour tout p_F il y a $c', c'' \models p_F$ avec $c' \downarrow g'$ et $g' \in F_{c'}$, ainsi que $c'' \downarrow g''$ et $g'' \in F_{c''}$. Grâce au théorème d'indépendance on peut supposer $c' = c''$ et $c' \downarrow g, g'$. Alors $g, g' \in F_{c'}$ et $g'g^{-1} \in F_{c'}$; comme $g'g^{-1} \downarrow c'$ on a $g'g^{-1} \in X_F$, d'où $g'g^{-1} \in X$. On pose $H = X^2$. Alors H est un sous-groupe de G hyperdéfinissable sur $\mathrm{bdd}(\emptyset)$ par [5, Lemma 4.4.8], et X contient tous les types génériques de H.

Si $g \in G$ est inévitable et $\mathcal{F}_A$ est une famille géométrique sur $A = \mathrm{bdd}(A)$, on choisit $A' \equiv_{\mathrm{bdd}(\emptyset)} A$ avec $g \downarrow A'$. Alors $\mathcal{F}_{A'}$ est toujours géométrique ; si $F' \in \mathcal{F}_{A'}$ est de paramètre c' canonique indépendant de g sur A', alors $g \in F'$ par le lemme 3.13. Comme $c' \downarrow g$ par transitivité, on a $g \in X_{F'} = X_F$, et donc $g \in X$, d'où $\mathrm{In}(G) \subseteq X \subseteq H$.

Soit $F \in \mathcal{F}_A$ de paramètre canonique c, et $h' \in H$ générique sur Ac. Alors il y a $c' \models p_F$ avec $h' \in F_{c'}$ et $c' \downarrow h'$. Soit $A' \downarrow_{c'} h'$ tel que $A'c' \equiv_{\mathrm{bdd}(\emptyset)} Ac$, et σ un $\mathrm{bdd}(\emptyset)$-automorphisme qui envoit $A'c'$ sur Ac. Soit $h = \sigma(h')$. Comme $h' \downarrow A'c'$ on a $h \downarrow Ac$, et h est générique dans H sur Ac. Comme $h \in F$, ceci signifie que F intersecte H dans un sous-groupe d'indice borné.

A priori la définition de H dépend des paramètres ; on dénotera par H_B le groupe obtenu par la même construction mais avec des paramètres B nommés. On montrera que H_B est un sous-groupe d'indice borné dans H. Soit donc p_F le type Lascar-fort sur $\emptyset$ du paramètre canonique c d'un groupe F_c dans une famille géométrique. Soit p'_F une extension non-deviante de p_F sur $\mathrm{bdd}(B)$; par la proposition 3.11 c'est le type Lascar-fort du paramètre canonique d'une famille géométrique dont les paramètre incluent B. Alors si $h \in H_B$ est générique sur B, il y a $c' \models p'_F$ avec $h \in F_{c'}$ et $c' \downarrow_B h$. Mais $c' \downarrow B$, d'où $c' \downarrow h$ et $h \in X \subseteq H$. Donc $H_B \leq H$.

Réciproquement, pour tout p'_F type Lascar-fort sur B du paramètre canonique d'un groupe dans une famille géométrique (avec B nommé) soit $c_F \models p'_F$ une réalisation. Alors F_{c_F} intersecte H dans un sous-groupe d'indice borné, et il y a $h \in H$ générique sur $B \cup (c_F)_F$ avec $h \in F_{c_F}$ pour tout F. Donc $h \downarrow B \cup (c_F)_F$, d'où $h \downarrow_B c_F$ pour tout F, et $h \in X_B \subseteq H_B$. Ceci signifie que H_B est générique, et donc d'indice borné, dans H.

Puisque l'image d'une famille géométrique sous un automorphisme $\mathrm{bdd}(\emptyset)$-définissable est encore géométrique avec les mêmes paramètres canoniques, H est invariant sous automorphisme $\mathrm{bdd}(\emptyset)$-définissable.

Si donc un automorphisme σ est définissable à l'aide de paramètres B, on a que $H_B = \sigma(H_B)$ est d'indice borné dans H et dans $\sigma(H)$. Ainsi H et $\sigma(H)$ sont commensurables.

Soit p un type générique principal Lascar-fort de G. On pose

$$Y = \{g \in G : \exists\, y \models p\ [\, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\, g \wedge g \in H^y\,]\}.$$

Comme avant, $Y^2 = K$ est un sous-groupe de G et Y contient tous les génériques de K. Comme H contient $\mathrm{In}(G)$ et ce dernier est normal, $\mathrm{In}(G) \leq H^y$ pour tout $y \models p$, et $\mathrm{In}(G) \leq K$. Si $y \models p$, alors $H \cap H^y$ est d'indice borné dans H et contient un générique h de H. Alors $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid} y$ et $h \in K$. Ainsi K intersecte H dans un sous-groupe d'indice borné. Réciproquement, si $h \in Y$ est générique dans K, il y a $y \models p$ avec $y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid} h$ et $h \in H^y$. Mais alors $\mathrm{tp}(h)$, $\mathrm{tp}(h/y)$ et $\mathrm{tp}(h^{y^{-1}}/y)$ ont les mêmes rangs locaux stratifiés ; comme $h^{y^{-1}} \in H$ on conclut que $H \cap K$ est d'indice borné dans K : On a bien que H et K sont commensurables.

Soit g générique principal de G, et $h \in K$ générique sur g. Alors il y a $y \models p$ avec $h \in H^y$ et $y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid} h$. Puisque p est générique et g générique principal, il y a $y' \models p$ avec $y'g \models p$ et $y' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid} g$. Comme $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid} g$ on peut prendre $y = y' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid} h, g$ par le théorème d'indépendance. Alors $h^g \in H^{yg}$ avec $yg \models p$ et $yg \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_g h^g$; puisque $yg \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid} g$ par généricité on a $yg \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid} h^g$, d'où $h^g \in Y \subseteq K$. Ainsi K est normalise par tous les génériques principaux de G, et donc par G^0.

Soit $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ l'intersection de K avec tous ses G-conjugués, et tous ses conjugués par $\emptyset$-automorphisme. C'est une intersection bornée ; $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ est donc hyperdéfinissable sur $\emptyset$, et clairement normal dans G. Comme tous ces conjugués sont commensurables, $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ est commensurable avec K, et donc avec H. Enfin, $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ est commensurable avec tout conjugué par automorphisme définissable, et tout groupe F dans une famille géométrique l'intersecte dans un sous-groupe d'indice borné, puisque c'est vrai de H.

La définition de $\widetilde{\Psi}(G)$ et la preuve de ses propriétés sont analogues, en utilisant les familles pseudo-géométriques. □

Remarque 4.2. Il se peut que $\mathrm{In}(G)$ soit trivial, bien que $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ est non-borné ; de plus, l'effet de la saturation n'est pas évident, puisqu'un groupe non-saturé a certes moins d'éléments dans ses sous-groupes hyperdéfinissables, mais aussi moins de famille géométriques qui interdiraient aux éléments d'appartenir à $\mathrm{In}(G)$. En particulier, si $G \preceq G^*$, il n'est pas clair si $\mathrm{In}(G) = \mathrm{In}(G^*) \cap G$, ni même si $\mathrm{In}(G) \leq \mathrm{In}(G^*)$.

Proposition 4.3. *S'il y a une famille géométrique non-triviale,* $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ *est d'indice non-borné dans* G*. S'il y a une famille pseudo-géométrique non-bornée,* $\widetilde{\Psi}(G)$ *est d'indice non-borné dans* G*.*

Démonstration : Supposons $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ d'indice borné dans G. Soit $\mathcal{F}$ une famille géométrique et $F, F' \in \mathcal{F}$. Alors $\widetilde{\mathrm{In}}(G) \cap F \cap F'$ est d'indice borné dans G, et contient un générique g. Mais $g \in F$ et $g \in F'$, d'où $F = F'$.

Si $\widetilde{\Psi}(G)$ est d'indice borné dans G et $\mathcal{F}$ est une famille pseudo-géométrique, soient $(F_i : i \in I)$ des groupes distincts dans F. Alors $\widetilde{\Psi}(G) \cap \bigcap_{i\in I} F_i$ est générique dans G et contient un générique g. Donc I et $\mathcal{F}$ sont bornés, puisque $g \in F_i$ pour tout $i \in I$. □

Remarque 4.4. Si $\mathcal{F}$ est une famille géométrique et $F \in \mathcal{F}$ coupe $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ dans un sous-groupe propre, soit $g \in F$ générique pour G sur $\emptyset$ et $h \in \widetilde{\mathrm{In}}(G) \setminus F$ avec $g \mathop{\smile\!\!\!\!\mid} h$. Alors $gh \notin F$; mais gh est toujours générique, et peut être contenu dans un autre groupe $F' \in \mathcal{F}$. Notons que si $F \cdot \widetilde{\mathrm{In}}(G) = F' \cdot \widetilde{\mathrm{In}}(G)$, alors F et F' sont commensurables et donc égaux. En particulier la famille $\bar{\mathcal{F}}$ des images de $\mathcal{F}$ dans $G/\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ n'est plus géométrique, puisque le générique $g \cdot \widetilde{\mathrm{In}}(G)$ est contenu dans plusieurs groupes dans $\bar{\mathcal{F}}$.

Proposition 4.5. *Si* $\mathcal{F}$ *est une famille pseudo-géométrique dans* G*, alors l'image* $\bar{F}$ *de* $\mathcal{F}$ *dans* $G/\widetilde{\Psi}(G)$ *est une famille pseudo-géométrique. En particulier* $\widetilde{\Psi}$ *est un radical :* $\widetilde{\Psi}(G/\widetilde{\Psi}(G))$ *est trivial.*

Démonstration : Comme F et $F \cdot \widetilde{\Psi}(G)$ sont commensurables pour $F \in \mathcal{F}$, si $F \cdot \widetilde{\mathrm{In}}(G)$ et un conjugué groupe- ou modèle-théorique $(F \cdot \widetilde{\mathrm{In}}(G))^\sigma$ sont commensurables, alors F et F^σ sont commensurables et donc égaux par connexité locale. Puisque $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ est σ-invariant, $\bar{\mathcal{F}}$ consiste de groupes localement connexes. Pour montrer que $\bar{\mathcal{F}}$ est pseudo-géométrique, il suffit alors à montrer que tout générique de $G/\widetilde{\Psi}(G)$ n'est contenu que dans un nombre borné de groupes dans $\bar{\mathcal{F}}$.

Soit $g \in G$ générique sur les paramètres A qui servent à définir $\mathcal{F}$, et H_g l'intersection avec $\widetilde{\Psi}(G)$ de tous les $F \in \mathcal{F}$ qui contiennent g. C'est une intersection bornée ; H_g est donc d'indice borné dans $\widetilde{\Psi}(G)$. Soit p un type complèt sur A, g tel que $p(x)$ implique que $x \in \widetilde{\Psi}(G)$ et gx est générique dans G sur A. Si $a, b \models p$ et $a \in bH_{gb}$, alors ga est dans tous les $F \in \mathcal{F}$ qui contiennent gb ; par conséquent $H_{ga} \leq H_{gb}$ et

$$aH_{ga} \subseteq aH_{gb} = bH_{gb}.$$

Montrons l'égalité. Sinon $x \in yH_{gy}$ définit un ordre partiel $\leq$ sur p avec $a < b$. Puisque p est complet, un trouve une chaîne $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ de réalisations de p ; par compacité il y a $a_\omega \models p$ avec $a_\omega \geq a_i$ pour tout $i < \omega$, et puisque la chaîne $(a_i : i < \omega)$ est strictement croissante, $a_\omega > a_i$ pour tout $i < \omega$. Récursivement on trouve ainsi une chaine stricte aussi longue qu'on veut, et par le théorème d'Erdös-Rado il y a une sous-chaîne 4-indiscernable infinie, qu'on nomme encore $(a_i : i \leq \omega)$. Soit $\varphi(x, yz)$ une formule dans $y \leq x \leq z$ tel que

$$\mathrm{tp}(a_0a_1a_2a_3) \wedge p(x) \wedge p(x') \wedge \varphi(x, a_0a_1) \wedge \varphi(x', a_2a_3)$$

implique $x \neq x'$. Alors

$$\begin{aligned} D(p(x) \wedge a_0 \leq x \leq a_1, \varphi, 2) &= D(p(x) \wedge a_0 \leq x \leq a_\omega, \varphi, 2) \\ &\geq D(p(x) \wedge a_0 \leq x \leq a_1, \varphi, 2) + 1, \end{aligned}$$

une contradiction. Donc $H_{ga} = H_{gb}$ et $aH_{ga} = bH_{gb}$. Ainis ga et gb sont contenus dans les mêmes groupes $F \in \mathcal{F}$.

Autrement dit, pour $h \models p$ les ensembles hH_{gh} définissent une partition de p ; soit $\sim_p$ la relation d'équivalence correspondante. Mais comme H_{gh} est d'indice borné dans $\widetilde{\Psi}(G)$, pour $h \models p$ la classe hH_{gh} contient un élément générique h' de $\widetilde{\Psi}(G)$ sur A, g, h. Donc $h' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{A,g} h$, et $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{A,g} h_{\sim_p}$ puisque $h_{\sim_p} = h'_{\sim_p}$. Ainsi $h_{\sim_p} \in \mathrm{bdd}(A, g)$ et il n'y a qu'un nombre borné de $\sim_p$-classes.

Or, pour tout $h \in \widetilde{\Psi}(G)$ et $F \in \mathcal{F}$ tel que $gh \in F$, comme F coupe $\widetilde{\Psi}(G)$ dans un sous-groupe d'indice fini, il y a $h' \in \widetilde{\Psi}(G) \cap F$ générique sur A, g, h. Alors hh' est générique dans $\widetilde{\Psi}(G)$ sur A, g, et $ghh' \in F$ est générique dans G sur A. Comme le nombre de types p sur A, g est borné, et chaque type ne contient qu'un nombre borné de $\sim_p$-classes, et chaque $\sim_p$-classe consiste d'éléments $h \models p$ tel que gh est dans les mêmes groupes $F \in \mathcal{F}$, le translaté $g\widetilde{\Psi}(G)$ n'intersecte qu'un nombre borné de groupes $F \in \mathcal{F}$. Puisque tout générique de $G/\widetilde{\Psi}(G)$ se relève en un générique de G, la famille $\bar{\mathcal{F}}$ est pseudo-géométrique.

Enfin, un élément $\bar{g} \in G/\widetilde{\Psi}(G)$ est dans un groupe $\bar{F}_c$ d'une famille pseudo-géométrique $\bar{\mathcal{F}}$ pour un $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|} \bar{g}$ si et seulement si un pré-image $g \in G$ est dans le pré-imagé $F_c \cdot \widetilde{\Psi}(G)$ de la famille $\mathcal{F}$ avec $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|} g$. Alors $F_cg \cap \widetilde{\Psi}(G)$ est non-vide et ainsi d'indice borné dans $\widetilde{\Psi}(G)$; soit $g' \in F_cg \cap \widetilde{\Psi}(G)$ générique dans $\widetilde{\Psi}(G)$ sur c, g. Alors $g' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|} g, c$, d'où $g' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_g c$ et $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|} g, g'$. Ainsi $gg'^{-1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|} c$ et $gg'^{-1} \in F_c$. Donc $gg'^{-1} \in X_F$, l'ensemble utilise dans la construction de $\widetilde{\Psi}(G)$. On peut faire la même chose simultanément pour tous les p_F possibles : Il suffit de prendre g'

générique dans

$$\widetilde{\Psi}(G) \cap \bigcap_F F_{c_F} g$$

où l'intersection $\bigcap_F$ porte sur un ensemble de représentants des groupes F pour les types Lascar-forts possibles de leur paramètre canonique c_F, et $c_F \perp g$ avec $g \in F_{c_F} \cdot \widetilde{\Psi}(G)$. Ainsi, $gg'^{-1} \in X$ et

$$\widetilde{\Psi}(G/\widetilde{\Psi}(G)) \leq X^2/\widetilde{\Psi}(G).$$

Or, $X^2/\widetilde{\Psi}(G)$ est un groupe borné. On a donc $Y/\widetilde{\Psi}(G) = X^2/\widetilde{\Psi}(G)$. Comme $\widetilde{\Psi}(G)$ est l'intersection de tous les conjugues de Y^2 groupe- ou modèle-théoriques, l'intersection de tous les conjugues groupe- ou modèle-théoriques de $Y^2/\widetilde{\Psi}(G)$ est bien triviale. □

Remarque 4.6. On peut enfin définir $\widetilde{\mathrm{In}}_P$ et $\widetilde{\Psi}_P$ de la même manière que Frécon (définition 2.3). Ce seront des sous-groupes hyperdéfinissables normaux, et contenus dans $\widetilde{\mathrm{In}}(G)$ et $\widetilde{\Psi}(G)$, respectivement. De plus,

$$\widetilde{\mathrm{In}}_P(\prod_{i<n} G) = \prod_{i<n} \widetilde{\mathrm{In}}_P(G) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\Psi}_P(\prod_{i<n} G) = \prod_{i<n} \widetilde{\Psi}_P(G).$$

Références

[1] O. Frécon. Groupes géométriques de rang de Morley fini. *J. Inst. Math. Jussieu*, 7(4) :751–792, 2008.

[2] E. Jaligot. Generix never gives up. *J. Symb. Logic*, 71(2) :599–610, 2006.

[3] B. Poizat. Groupes Stables. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique. *Nur al-Mantiq wal-Ma ́rifah* (1987). Traduction anglaise : Stable groups. Mathematical Surveys and Monographs, 87. *Amer. Math. Soc.* (2001).

[4] F. O. Wagner. Stable groups. LMS LN 240. *Cambridge University Press*, Cambridge, 1997.

[5] F. O. Wagner. *Simple Theories*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[6] F. O. Wagner. Stable Groups. In : M. Hazewinkel (ed.), Handbook of Algebra, Vol. 2, pp. 277–318. *Elsevier Science Publishers*, Amsterdam, 2000.

[7] F. O. Wagner. Hyperdefinable groups in simple theories. *J. Math. Logic*, 1(1) :152–172, 2001.

[8] F. O. Wagner. Groups in simple theories. In : M. Baaz, S.-D. Friedman, J. Krajícek (eds.), Logic Colloquium 2001, LN Logic 20, pp. 440-467. *Assoc. for Symbolic Logic*, *A. K. Peters*, Wellesley, 2005.

Université de Lyon ; Université Lyon 1 ; CNRS ; Institut Camille Jordan UMR5208, Bâtiment Braconnier, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-cedex, France

E-mail address: wagner@math.univ-lyon1.fr